

**2. Über die Fortpflanzung des Lichtes in
dispargierenden Medien;
von L. Brillouin.**

§ 1.

In der folgenden Arbeit nehme ich das Problem auf, das Hr. Sommerfeld in der vorstehenden Abhandlung gestellt hat. Die Ausbreitung eines einseitig abgebrochenen Signales, um die es sich handelt, führt auf das Integral

$$(1) \quad f(t, x) = \frac{1}{2\pi} \Re \int \frac{e^{-i(nt-kx)}}{n-\nu} dn,$$

das in der komplexen n -Ebene von $+\infty$ bis $-\infty$ über den Weg u zu erstrecken ist (vgl. vorstehende Abhandlung § 2, Fig. 2 und Gl. (9)). $\nu = 2\pi/\tau$ ist die Frequenz, τ die Schwingungsdauer des Signales, k hat den Wert

$$(2) \quad k = \frac{n}{c} \mu,$$

wo c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, μ den komplexen Brechungsindex für die Frequenz n bedeutet (vgl. l. c. Formel (13)):

$$(2') \quad \mu^2 = 1 + \frac{a^2}{n_0^2 - 2in_0q - n^2}.$$

Das Integral (1) stellt das Signal zur Zeit t in der Tiefe x des Mediums vom Brechungsindex μ dar. Wir bezeichnen den Exponenten von e mit w :

$$(3) \quad w = -i(nt - kx) = \frac{x}{c} v,$$

$$(4) \quad v = -in(\Theta - \mu),$$

$$(4a) \quad \Theta = \frac{ct}{x}.$$

Ein mit Lichtgeschwindigkeit c fortschreitendes Signal würde in der Tiefe x zur Zeit $t = x/c$ ankommen, d. h. für $\Theta = 1$. In der vorstehenden Arbeit hat Hr. Sommerfeld gezeigt, daß ein Signal sich keinesfalls mit Überlichtgeschwindigkeit aus-

breitet, d. h. daß $f(t, x)$ für $\Theta < 1$ verschwindet. Es sei außerdem

$$(4b) \quad \Theta - 1 = \delta,$$

$$(4c) \quad t - \frac{x}{c} = t.$$

Ich will nun die Gestalt des Signals untersuchen und zeigen, daß man eine exakte Definition des Begriffes der Signalgeschwindigkeit geben kann und daß dieselbe mit der Gruppengeschwindigkeit identisch ist außer für Signale, deren Wellenlänge dem Gebiete der anomalen Dispersion des Mediums benachbart ist.

ξ, η seien in der komplexen n -Ebene die beiden Koordinaten:

$$n = \xi + i\eta,$$

X, Y seien der reelle und imaginäre Teil der Funktion v :

$$v = X + iY.$$

Für die Diskussion des Integrals ist es am einfachsten, den Integrationsweg so zu deformieren, daß X im allgemeinen große negative Werte annimmt; dann verschwindet das Integral und man hat die Rechnung nur für die Teile des Integrationsweges durchzuführen, für die X dem absoluten Betrage nach nicht sehr groß ist.

Bekanntlich hat vermöge der Gleichungen

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = \frac{\partial Y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial X}{\partial \eta} = -\frac{\partial Y}{\partial \xi}$$

die Funktion X nirgends ein Maximum oder Minimum von endlichem Betrage; es können nur Sattelpunkte auftreten, wenn nämlich

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = \frac{\partial X}{\partial \eta} = 0.$$

In einem solchen Punkt hat auch die Funktion Y einen Sattelpunkt; er ist bestimmt durch die Gleichung

$$(5) \quad \frac{dv}{dn} = 0.$$

Im folgenden werde ich die komplexe Ebene als topographische Karte und X als Erhebung betrachten und von

Niveaulinien und Fallinien (Linien stärksten Abfalls) von X sprechen. Die Fallinien für X sind Niveaulinien für Y . Sie können nur von den Punkten ausgehen, wo X unendlich ist, da ja keine endlichen Maxima und Minima auftreten. Der Übergang von einem Tal in ein anderes erfolgt am einfachsten über den Sattelpunkt. Die Integration in der Nähe der Sattelpunkte wird uns besonders interessieren.¹⁾ Es wird sich zeigen, daß die für uns in Betracht kommenden Sattelpunkte immer in der Nähe der reellen Achse liegen.

Nach (5) lautet die Bedingung für den Sattelpunkt mit Rücksicht auf (3):

$$(6) \quad t - \frac{dk}{dn} x = 0.$$

Wenn n reell ist, d. h. wirklich eine Frequenz darstellt, so ist die Gruppengeschwindigkeit dieser Frequenz (vgl. vorstehende Abhandlung § 1) gleich dn/dk . Folglich liegt zur Zeit t der Sattelpunkt an der Stelle derjenigen Frequenz n , deren Gruppengeschwindigkeit gleich x/t ist. Bei der Ausführung der Integration darf man sich nun auf die Nachbarschaft des Sattelpunktes, d. h. auf die Nähe dieser Frequenz beschränken. Daraufhin können wir bereits angenähert sagen, daß jede elementare Schwingungsbewegung des Signals sich mit ihrer Gruppengeschwindigkeit ausbreitet, wenigstens solange wir im Gebiete normaler Dispersion bleiben.

Übersicht. In § 2 soll die komplexe n -Ebene untersucht werden, insbesondere die Nähe der Punkte, wo X Null oder unendlich wird. § 3 gibt die Lage der verschiedenen Sattelpunkte, ihre Verschiebung in Abhängigkeit von der Zeit und einiges über die Größenordnung der in die Formeln eintretenden Größen. In § 4 wird der mit der Zeit wechselnde Verlauf des Integrationsweges verzeichnet. Hieraus ergeben sich bereits einige allgemeine Angaben über die Signalgeschwindigkeit. § 5 enthält die Integration in der Nähe der Sattelpunkte, d. h. die Berechnung der Vorläufer. Diese Ergebnisse erlauben in § 6 die Signalgeschwindigkeit auch für

1) Über die Methode der Sattelpunkte und ihre Anwendung vgl. P. Debye, Math. Annalen 67. p. 535. Sitzungsber. d. Bayer. Akad. 1910; zuerst bei Riemann, Ges. Werke, Leipzig 1876, Nachlaß p. 400.

den Fall anomaler Dispersion anzugeben. Den Schluß bildet eine Bemerkung über den Vergleich der benutzten „Methode der Sattelpunkte“ und der sogenannten „Methode der stationären Phase“.

§ 2. Untersuchung der komplexen n -Ebene.

Wir suchen die Gebiete der komplexen n -Ebene, in denen der reelle Teil X des Exponenten negativ ist. Die Grenzkurve wird gegeben sein durch die Gleichung $X = 0$. Wir wissen bereits, wie X sich im Unendlichen verhält (vgl. Sommerfeld, l. c. § 4):

für $\Theta < 1$ ist X im Unendlichen
 negativ unendlich oberhalb der reellen Achse,
 positiv unendlich unterhalb der reellen Achse,
 für $\Theta = 1$ verschwindet X im Unendlichen,
 für $\Theta > 1$ ist X im Unendlichen,
 positiv unendlich oberhalb der reellen Achse,
 negativ unendlich unterhalb der reellen Achse.

Andererseits haben wir *auf der reellen Achse* (vgl. Sommerfeld, l. c. Formel (16))

$$(7) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} (1 + i\kappa).$$

($\lambda =$ Wellenlänge im dispergierenden Medium, $\kappa =$ Absorptionsindex.) Nach Gleichung (2) kann man dafür schreiben

$$k = \frac{n}{c} \mu_r (1 + i\kappa),$$

wenn der komplexe Brechungsindex gegeben ist durch

$$(7) \quad \mu = \mu_r + i\mu_i \quad \mu_i = \kappa \mu_r.$$

c/μ_r stellt bekanntlich die Phasengeschwindigkeit V dar. Jetzt ist nach (4) der reelle Teil von $v = -in(\Theta - \mu)$

$$X = -n\mu_i = -n\kappa\mu_r.$$

X ist also auf der reellen Achse negativ außer für die Frequenzen n , für welche der Absorptionsindex κ verschwindet. Dem absoluten Werte nach ist X groß für das Gebiet anomaler Dispersion, klein für sehr kleine oder sehr große n .

Ich betrachte jetzt X auf der Geraden $\eta = -\rho$, die bestimmt ist durch die Punkte N_1, N_2 (wo X verschwindet) und

U_1, U_2 (wo X unendlich ist) und in der Nähe der Verzweigungsschnitte $N_1 U_1$ und $N_2 U_2$. Die Koordinaten dieser Punkte sind (vgl. Sommerfeld, l. c. § 4):

$$\begin{array}{ll} U_1, U_2 & \eta = -\rho \quad \xi_\infty = \pm \sqrt{n_0^2 - \rho^2} \\ N_1, N_2 & \eta = -\rho \quad \xi_n = \pm \sqrt{n_0^2 + a^2 - \rho^2}. \end{array}$$

Auf der Geraden $\eta = -\rho$ hat μ den Wert

$$(8) \quad \mu = \sqrt{1 + \frac{a^2}{\xi_\infty^2 - \xi^2}},$$

ist also positiv reell in den Intervallen $0 < \xi < \xi_\infty, \xi_n < \xi < \infty$, und rein imaginär für $\xi_\infty < \xi < \xi_n$, und zwar positiv auf dem einen Ufer des Schnittes $\xi_n \xi_\infty$, negativ auf dem anderen. Um diese Zeichen zu bestimmen, betrachten wir μ in der Nähe der Punkte U_1, N_1 .

Für die Umgebung von N_1 setzen wir

$$n = -i\rho + \xi_n + r e^{i\alpha},$$

wo r, α Polarkoordinaten um N_1 bedeuten, und finden

$$(9) \quad \begin{cases} \mu^2 = \frac{2\xi_n r e^{i\alpha}}{a^2}, \\ \mu = \frac{\sqrt{2\xi_n r}}{a} e^{i\frac{\alpha}{2}}. \end{cases}$$

Daher für

$$\alpha = 0 \quad \mu_0 = \frac{\sqrt{2\xi_n r}}{a},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \mu_{\frac{\pi}{2}} = \mu_0 \frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

$$\alpha = \pi \quad \mu_\pi = +\mu_0 i,$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} \quad \mu_{-\frac{\pi}{2}} = \mu_0 \frac{1-i}{\sqrt{2}},$$

$$\alpha = -\pi \quad \mu_{-\pi} = -\mu_0 i.$$

Ebenso sei in der Umgebung von U_1 :

$$n = -i\rho + \xi_\infty + R e^{i\omega},$$

dann wird

$$(10) \quad \begin{cases} \mu^2 = -\frac{a^2}{2\xi_\infty R} e^{-i\omega} = \frac{a^2}{2\xi_\infty R} e^{+i(\pi-\omega)}, \\ \mu = \frac{a}{\sqrt{2\xi_\infty R}} e^{i\frac{\pi-\omega}{2}}, \end{cases}$$

also für

$$\begin{aligned} \omega = \pi & \quad \mu_{\pi} = +\infty, \\ \omega = \frac{\pi}{2} & \quad \mu_{\frac{\pi}{2}} = (1+i)\infty, \\ \omega = 0 & \quad \mu_0 = +i\infty, \\ \omega = \frac{3\pi}{2} & \quad \mu_{\frac{3\pi}{2}} = (1-i)\infty, \\ \omega = 2\pi & \quad \mu_{2\pi} = -i\infty. \end{aligned}$$

Dies ist in der nachstehenden Fig. 1 angedeutet. Nun sieht man leicht, daß X (= reeller Teil von $v = -in(\Theta - \mu)$) in der Nähe von N_1 auf beiden Ufern des Schnittes negativ ist. Denn wir nehmen $\Theta \geq 1$ (vgl. § 1). In der Nähe von U_1 dagegen ist X negativ am oberen Rand des Schnittes und am andern positiv.

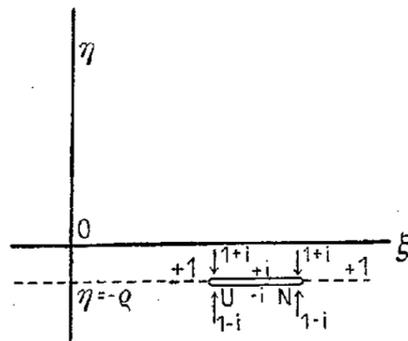


Fig. 1.

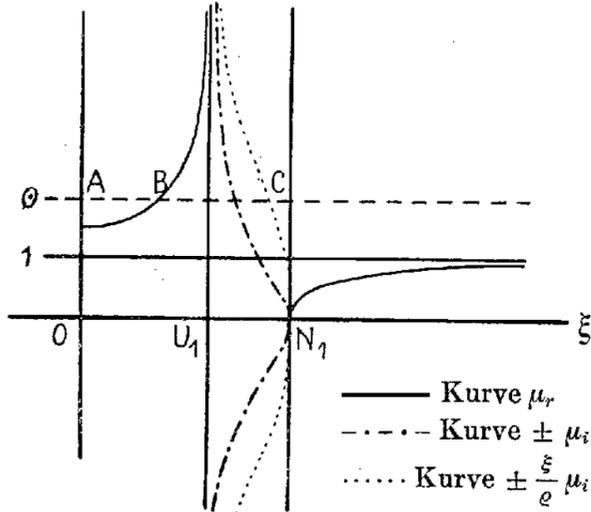


Fig. 2.

Formel (8) liefert den Wert von μ auf der Geraden $\eta = -\rho$. Wir leiten daraus den Wert von X ab:

$$\begin{aligned} \text{ist } \mu \text{ reell:} & \quad X = -\rho(\Theta - \mu_r), \\ \text{ist } \mu \text{ rein imaginär:} & \quad X = -(\rho\Theta \pm \xi\mu_i). \end{aligned}$$

In Fig. 2 sind zur Abszisse ξ (diese auf der Geraden $\eta = -\rho$ genommen) $\mu_r, \pm \mu_i, \pm (\xi/\rho)\mu_i$ als Ordinate aufgetragen. Die Punkte $X = 0$ ergeben sich dann als Schnittpunkte von μ_r oder von $\pm (\xi/\rho)\mu_i$ mit einer Parallelen zur ξ -Achse im Abstand Θ . Für $\Theta \geq 1$ liegt einer dieser Punkte zwischen N_1 und U_1 und zwar am unteren Rand des Schnittes, seine Abszisse ist $\xi = AC$. Mit wachsendem Θ verschiebt er sich von N_1 gegen U_1 . Ein

zweiter Schnittpunkt mit der Abszisse $\xi = AB$ kann zwischen 0 und U_1 auftreten.

Aus dem Verhalten von X in der Nähe von U_1 folgt, daß die Kurve $X=0$ von diesem Punkt U_1 ausgehen muß. Für die Umgebung von U_1 war

$$\mu = \frac{a}{\sqrt{2\xi_\infty R}} \left(\sin \frac{\omega}{2} + i \cos \frac{\omega}{2} \right),$$

daher

$$X = -\rho \Theta + \frac{a}{\sqrt{2\xi_\infty R}} \left(\rho \sin \frac{\omega}{2} - \xi_\infty \cos \frac{\omega}{2} \right).$$

Sei ω_1 eine Lösung der Gleichung

$$\operatorname{tg} \frac{\omega_1}{2} = \frac{\xi_\infty}{\rho},$$

so ist, $\xi_\infty \gg \rho$ vorausgesetzt, ω_1 ein Winkel nahe an π , der bis auf Vielfache von 2π definiert ist. Dann wird

$$X = -\rho \Theta + \frac{b}{\sqrt{R}} \sin \frac{\omega - \omega_1}{2}$$

mit der Abkürzung

$$b = a \sqrt{\frac{\rho^2 + \xi_\infty^2}{2\xi_\infty}}.$$

Die Kurve $X=0$ ist dann für kleine R und kleine $\omega - \omega_1$ die Spirale

$$\omega = \omega_1 + \frac{2\rho}{b} \Theta \sqrt{R},$$

die in U_1 die Gerade $\omega = \omega_1$ berührt.

Nebenstehende Fig. 3 zeigt das Bild der komplexen Ebene in der Umgebung des Schnittes $U_1 N_1$. In den schraffierten Gebieten ist X negativ.

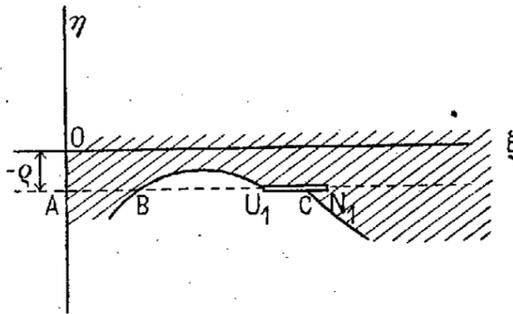


Fig. 3.

§ 3. Lage der Sattelpunkte.

Was uns am meisten interessieren wird, ist nicht so sehr die Kurve $X=0$ als vielmehr die *Lage der Sattelpunkte*. Sind diese einmal gefunden, so wird sich der Integrationsweg als Fallinie über die Sattelpunkte ohne Schwierigkeiten angeben

lassen. Die Kurve $X=0$ ist eine der zu den Fallinien orthogonalen Niveaulinien.

A. Umgebung des Anfangspunktes.

Um die Sattelpunkte in der Umgebung des Anfangspunktes zu finden, entwickeln wir μ nach steigenden Potenzen von n :

$$\mu = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n_0^2 - 2i\rho n - n^2}} = \sqrt{\frac{n_2^2 - 2i\rho n - n^2}{n_0^2 - 2i\rho n - n^2}} \quad (n_2^2 = n_0^2 + \alpha^2).$$

Wir haben zu entwickeln $(n_2^2 - \alpha)/(n_0^2 - \alpha)$, wo $\alpha = 2i\rho n + n^2$ klein ist gegen n_0^2 und n_2^2 :

$$\begin{aligned} \frac{n_2^2 - \alpha}{n_0^2 - \alpha} &= \frac{n_2^2}{n_0^2} \left(1 - \frac{\alpha}{n_2^2}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{n_0^2} + \dots\right), \\ \mu &= \frac{n_2}{n_0} \left(1 + \frac{\alpha}{2} \frac{1}{n_0^2 n_2^2} + \dots\right), \\ (11) \quad \mu &= \frac{n_2}{n_0} + An(n + 2i\rho) + \dots, \end{aligned}$$

wenn α eingesetzt wird und A definiert ist durch

$$A = \frac{\alpha^2}{2n_0^3 n_2}.$$

Nach (4) wird nun

$$(12) \quad v = -in(\Theta - \mu) = -in(\delta' - An(n + 2i\rho)),$$

wenn gesetzt wird (vgl. 4b)

$$(12') \quad \delta' = \Theta - \frac{n_2}{n_0} = \delta - \left(\frac{n_2}{n_0} - 1\right).$$

Um die Sattelpunkte zu finden, haben wir zu bilden

$$\frac{dv}{dn} = 0, \quad \delta' - An(3n + 4i\rho) = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$n = -\frac{2}{3}i\rho \pm \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3\delta'}{A} - 4\rho^2}.$$

Fall A 1: $\delta' < \frac{4}{3}A\rho^2$; die Sattelpunkte sind gegeben durch

$$(13) \quad n = i\left(-\frac{2}{3}\rho \pm \frac{1}{3}\sqrt{4\rho^2 - \frac{3\delta'}{A}}\right);$$

sie liegen auf der imaginären Achse symmetrisch zum Punkt $\xi = 0, \eta = -\frac{2}{3}\rho$. Man zeigt leicht, daß die Fallinien durch diese Punkte zu den Achsen parallel sind (vgl. Fig. 4). Die Pfeile deuten die Richtung des Anstiegs auf den Fallinien an.

Fall A 2: $\delta' > \frac{4}{3} A \rho^2$; die Sattelpunkte liegen auf der Geraden $\eta = -\frac{2}{3} \rho$ symmetrisch zur imaginären Achse:

$$(14) \quad \begin{cases} n = -i \frac{2}{3} \rho \pm \xi_p, \\ \xi_p = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3\delta'}{A} - 4\rho^2}. \end{cases}$$

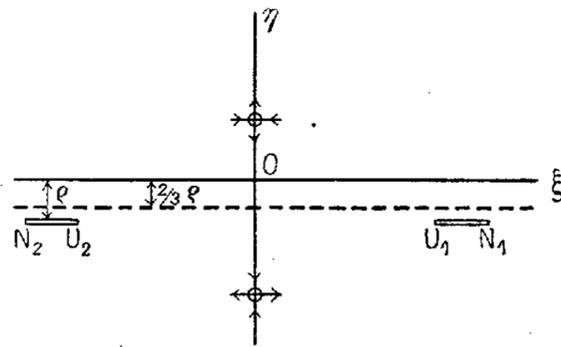


Fig. 4.

Die zugehörigen Falllinien sind unter 45° gegen die Achsen geneigt (vgl. Fig. 5).

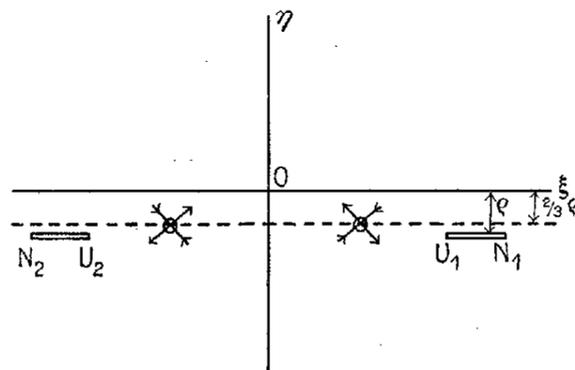


Fig. 5.

Fall A 3: $\delta' = \frac{4}{3} A \rho^2$; in diesem Fall existiert ein spezieller Sattelpunkt

$$(15) \quad n = -\frac{2}{3} i \rho,$$

für den gleichzeitig dv/dn und $d^2v/dn^2 = iA(6n + 4i\rho)$ verschwinden. Um in der Umgebung dieses Punktes v zu berechnen, führen wir Polarkoordinaten r, α um den Sattelpunkt ein:

$$n = -\frac{2}{3} i \rho + r e^{i\alpha};$$

dann wird

$$v = i(-\delta' n + A n^3 + 2i\varrho A n^2) = iA(-\frac{4}{3}\varrho^2 n + 2i\varrho n^2 + n^3)$$

$$v = v_p + iAr^3 e^{i3\alpha}$$

$$v_p = -\frac{8}{27}A\varrho^3.$$

Daher

$$X = X_p - Ar^3 \sin 3\alpha.$$

Fig. 6 gibt das Bild dieses Sattelpunktes und den Verlauf der Falllinien in ihm.

Die beiden Sattelpunkte, die zunächst auf der imaginären Achse liegen, nähern sich also mit wachsender Zeit, fallen im Augenblick

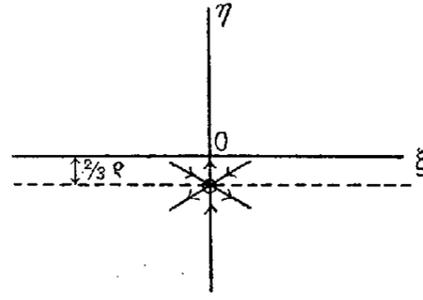


Fig. 6.

$$\delta' = \frac{4}{3}A\varrho^2 \text{ (d. h. } \Theta = \frac{n_2}{n_0} + \frac{4}{3}A\varrho^2)$$

in einen speziellen zusammen und rücken dann symmetrisch zur imaginären Achse auseinander.

B. Sattelpunkte in großer Entfernung.

Wir betrachten die komplexe n -Ebene für große n und vernachlässigen n_0^2 gegen n^2 . Dann wird nach (2)

$$\mu^2 = 1 + \frac{a^2}{n_0^2 - 2in\varrho - n^2} \sim 1 - \frac{a^2}{n(2i\varrho + n)}$$

oder, da das zweite Glied sehr klein ist:

$$(16) \quad \mu = 1 - \frac{a^2}{2} \frac{1}{n(2i\varrho + n)}.$$

Formel (4) ergibt dann

$$v = -in(\Theta - \mu) = -in\delta - i\frac{a^2}{2} \frac{1}{2i\varrho + n},$$

wo $\Theta - 1 = \delta$ (vgl. 4b). Die Sattelpunkte sind definiert durch

$$\frac{dv}{dn} = 0, \quad \delta - \frac{a^2}{2} \frac{1}{(2i\varrho + n)^2} = 0.$$

Hieraus

$$(17) \quad n_p = -2i\varrho \pm \xi_p \quad \xi_p = \frac{a}{\sqrt{2\delta}}.$$

Wir haben also auf der Geraden $\eta = -2\rho$ symmetrisch zur η -Achse zwei Sattelpunkte. Für v schreiben wir dann

$$v = -i \frac{a^2}{2} \left(\frac{n}{\xi_p^2} + \frac{1}{2i\rho + n} \right).$$

Die Niveaulinien für X durch n_p sind die Parallelen zu den beiden Achsen. (Auf der ganzen Geraden $\eta = -2\rho$ wird in den Grenzen, in denen die Näherung gilt, $X = -2\rho\delta$). Die Falllinien sind unter 45° geneigt (vgl. Fig. 7). Für $\delta = 0$ liegen die Sattelpunkte auf der Geraden $\eta = -2\rho$ im Unendlichen, mit wachsendem δ verschieben sie sich auf dieser Geraden im Sinne der abnehmenden $|\xi|$; ist δ einigermaßen groß, so daß ξ_p nicht sehr groß ist im Vergleich mit n_0 , d. h. nähert sich der Sattelpunkt dem Verzweigungsschnitt, dann verliert die Annäherung ihre Gültigkeit. Man kann zeigen, daß die Sattelpunkte die Gerade $\eta = -2\rho$ verlassen, um sich längs der Kurve, die angenähert in Fig. 7 eingezeichnet ist, dem Verzweigungsschnitte zu nähern.

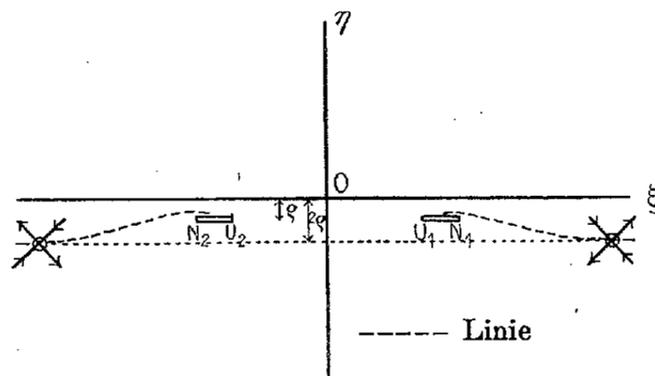


Fig. 7.

Für sehr kleine Zeiten δ (θ nahezu = 1) gibt es außer diesen Sattelpunkten noch zwei weitere auf der imaginären Achse zu beiden Seiten des Anfangspunktes, die sich mit wachsender Zeit der reellen Achse nähern. Es sind jene, welche wir für etwas größere Zeit θ unter A1 in der Nähe des Anfangspunktes gefunden haben. Ihre genaue Lage ist nicht von Wichtigkeit.

Größenordnung. Hier ist die Stelle über die Größenordnung der verschiedenen Konstanten, die in die Formeln eintreten, einige Angaben zu machen.

Die im dispergierenden Medium durchlaufene Tiefe nehmen wir gleich

$$x = 1 \text{ cm.}$$

Die Wellenlänge des auffallenden Signals sei in Luft gemessen

$$\lambda_0 = 0,5 \mu = 5 \cdot 10^{-5} \text{ cm,}$$

dann wird die Frequenz

$$\nu = \frac{2\pi c}{\lambda_0} = \frac{2 \cdot 10^{11}}{5 \cdot 10^{-5}} = 4 \cdot 10^{15}.$$

Die Eigenfrequenz des Mediums nehmen wir zu

$$n_0 = 10 \cdot \nu = 4 \cdot 10^{16}.$$

Der Brechungsindex für die Frequenz ν sei

$$\mu = 1,5.$$

Diese Angaben erlauben in Verbindung mit der Annahme verschwindender Absorption ($\rho = 0$) die Berechnung der Größenordnung von a^2 . Nach Formel (2') ist

$$\mu^2 = 1 + \frac{a^2}{n_0^2 - \nu^2}$$

$$a^2 = (\mu^2 - 1) \left(\left(\frac{n_0}{\nu} \right)^2 - 1 \right) \nu^2 = 1,25 \cdot 99 \cdot \nu^2 = 1,24 \cdot n_0^2,$$

also nahezu $a = n_0$. Hieraus

$$n_2 = \sqrt{n_0^2 + a^2} = 1,5 \cdot n_0 = 6 \cdot 10^{16}.$$

Der Koeffizient A war definiert durch

$$A = \frac{a^2}{2n_0^3 n_2} \sim \frac{a^5}{3n_0^4}, \quad A \sim \frac{1}{5} \cdot 10^{-33}.$$

Ich will auch eine Angabe über die Größenordnung des Koeffizienten ρ machen nach „Goldhammer, Dispersion und Absorption des Lichtes“.¹⁾ Man findet p. 126 Angaben über die Größenordnung des logarithmischen Dekrements γ für einige Stoffe. Dieses Dekrement hängt mit unserem ρ zusammen durch die Gleichung

$$\rho = \frac{\gamma \cdot n}{2\pi}.$$

Versuche mit Eosin und Fuchsin ergeben etwa

$$\gamma = 0,45$$

für Quecksilberdampf ist $\gamma = 0,8$, für Joddampf ist (l. c. p. 57) die Dämpfung sehr klein.

1) Leipzig 1913.

Die folgende Tabelle gibt die entsprechenden Werte von ρ .

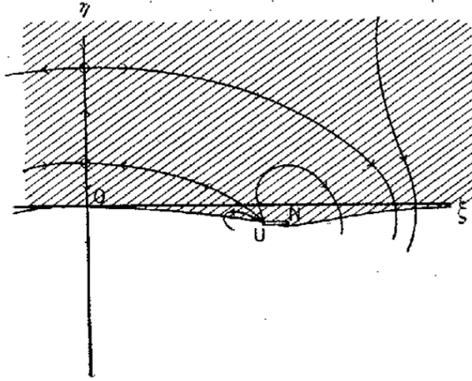
γ	0,06	0,3	0,45	0,6	0,9
ρ/n_0	10^{-2}	$5 \cdot 10^{-2}$	$7,5 \cdot 10^{-2}$	10^{-1}	$1,5 \cdot 10^{-1}$

In allen gewöhnlichen Fällen ist also ρ^2 klein gegen n_0^2 , etwa

$$\rho^2 = 5 \cdot 10^{-3} n_0^2.$$

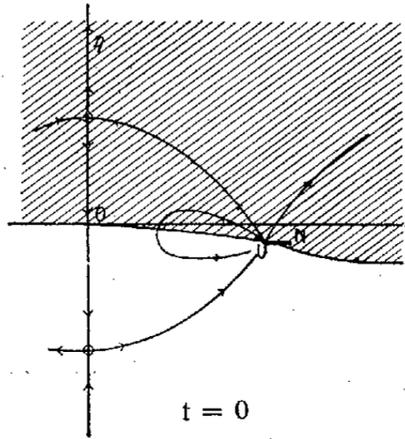
§ 4. Sukzessive Verlagerung der Sattelpunkte in Abhängigkeit von der Zeit. Wahl des Integrationsweges.

Die nachstehenden Figg. 8—14 zeigen den Anblick, den die komplexe Ebene für verschiedene Zeiten darbietet. Es ist nur die Halbebene dargestellt, man sieht aber leicht, daß zwei



$t < 0$

Fig. 8.



$t = 0$

Fig. 9.

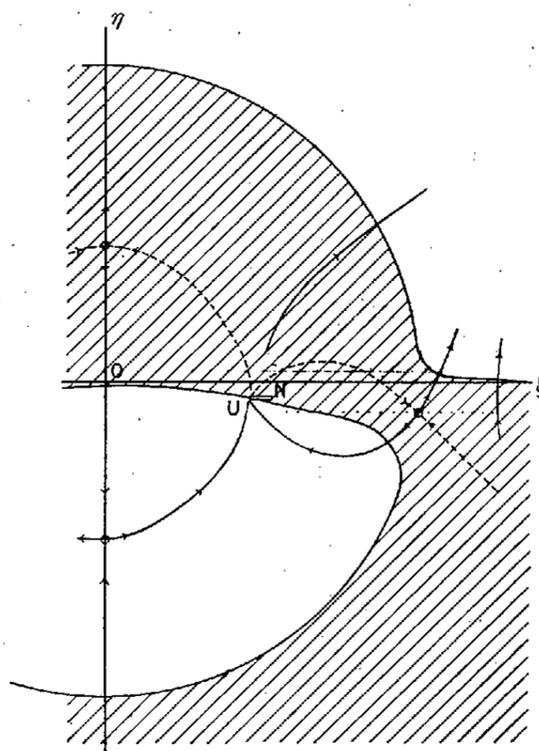
Punkten $n = \pm \xi + i\eta$, die zur imaginären Achse symmetrisch liegen, die Werte $v = X \pm iY$ entsprechen, so daß die Figuren symmetrisch sind in bezug auf die imaginäre Achse. In den schraffierten Gebieten ist X negativ. Die wichtigsten Falllinien sind eingezeichnet; sie gehen von den Punkten, wo X negativ unendlich ist, aus bis zu den Stellen, wo X positiv unendlich ist. Diese Punkte sind die beiden Punkte U und (außer für $t = 0$) der unendlich ferne Punkt in Richtung der imaginären Achse. Ich erinnere an die Bezeichnungen

$$\Theta = \frac{ct}{x} \qquad t - \frac{x}{c} = t$$

$$\Theta - 1 = \delta \qquad \frac{x}{c} \delta = t$$

Für $t < x/c$ herrscht Ruhe; das Integral verschwindet; die ersten Vorläufer des Signals kommen an mit der Geschwindigkeit c , d. h. zur Zeit $t = 0$ (vgl. Sommerfeld, l. c.).

Fig. 8 gibt das Bild der komplexen Ebene für $t < 0$.
Der Integrationsweg kann in Richtung der positiven imaginären



----- Integrationsweg.

Fig. 10.

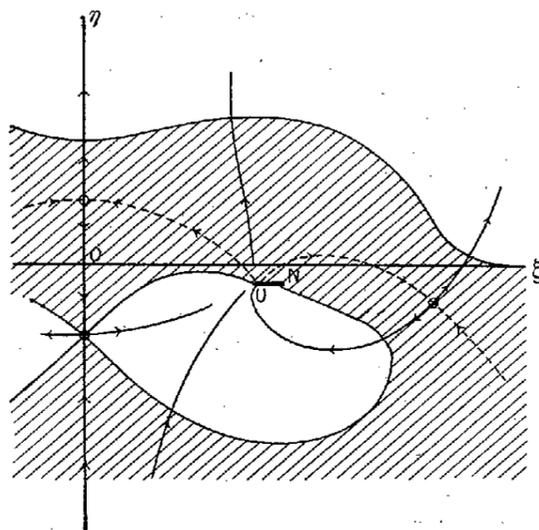


Fig. 11.

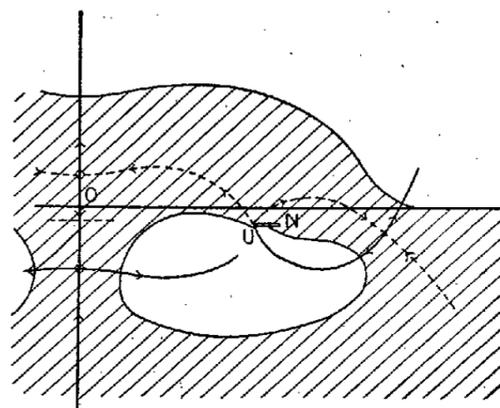


Fig. 12.

Achse ganz ins Unendliche gezogen werden. Das Integral
verschwindet, da X dort negativ unendlich ist.

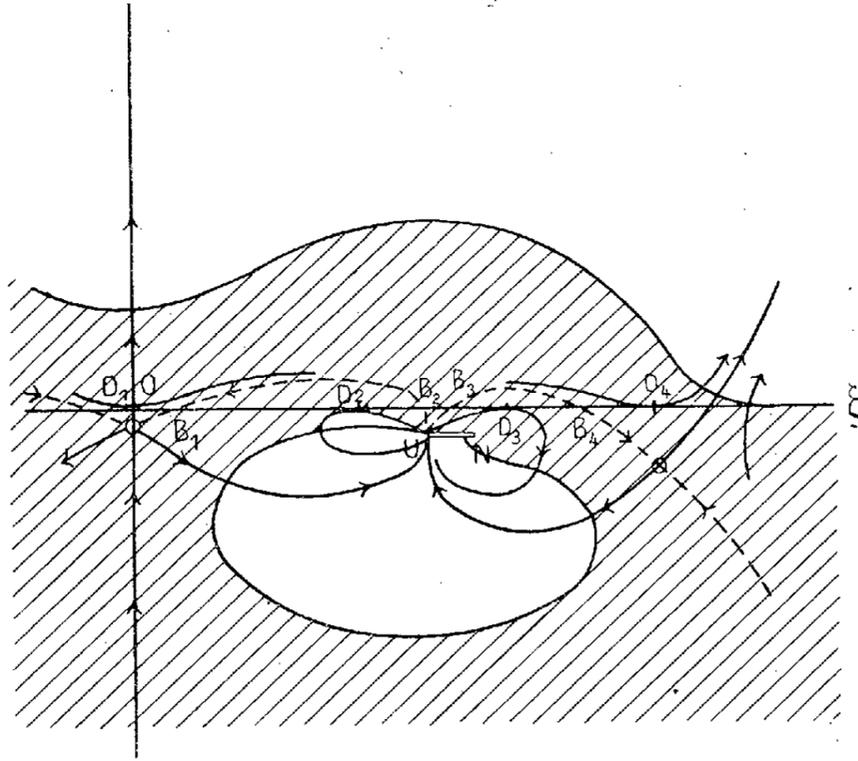


Fig. 13.

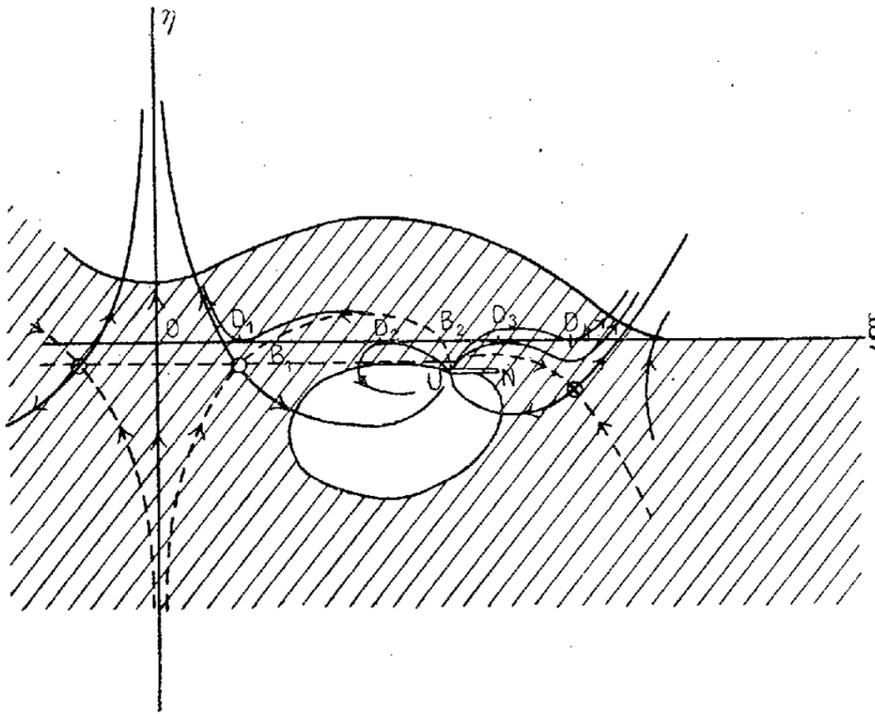


Fig. 14.

Für den Zeitpunkt $t = 0$, der in Fig. 9 dargestellt ist, bildet der Kreis mit unendlichem Radius einen Teil der Kurve $X = 0$. Man kann auch hier den Integrationsweg nach oben ins Unendliche ziehen, das Integral verschwindet, aber nicht mehr exponentiell, sondern wegen des Faktors $1/n - \nu$.

Für $t > 0$ ersieht man aus den Figg. 10—14 die Änderung der komplexen Ebene. Von einem Gebiete, wo X große negative Werte annimmt, gelangt man über einen Sattelpunkt in ein anderes solches Gebiet. Wir werden den Integrationsweg so ziehen, daß er möglichst lange durch solche Gebiete hindurchgeht, in denen das Integral praktisch Null ist. Es bleibt dann das Integral nur in der Umgebung der Sattelpunkte auszuwerten, und zwar wählt man am besten als Integrationsweg eine Falllinie durch den Sattelpunkt. Dieser Integrationsweg ist in die Figuren eingezeichnet und seine Änderung in Abhängigkeit von der Zeit leicht zu verfolgen.

In der Nähe der Sattelpunkte ist die Integration angenehmer auszuführen, wenn die Sattelpunkte nicht zu nahe an den Schnitten UN oder am Punkt $n = \nu$ liegen. Man kann den Integrationsweg durch seine Tangente im Sattelpunkt ersetzen und den Faktor $1/n - \nu$ als konstant betrachten und kommt so auf elementare Integrale (vgl. § 5). Unter den angegebenen Beschränkungen wird die Integration Ausdrücke liefern, die Vorläufer, deren Amplitude außerordentlich klein ist im Vergleich mit der schließlichen Amplitude des Signals.

Wir wollen nun sehen, was eintritt, wenn der Integrationsweg dem Punkte $n = \nu$ (ν reell) nahe kommt. Wir nehmen etwa diesen Punkt zwischen dem Anfangspunkt und dem Verzweigungsschnitt $0 < \nu < n_0$. Das entspricht dem oben bei Berechnung der Größenordnung gewählten Fall: wir hatten ein Signal im sichtbaren Teil des Spektrums, das sich in einem Medium mit einer Eigenperiode im Ultravioletten ausbreitet. Der umgekehrte Fall $\nu > n_0$ würde ganz analoge Resultate ergeben.

Mit zunehmender Zeit verläuft der Integrationsweg zunächst oberhalb und links von dem Pole ν , geht dann durch ihn hindurch und verläuft endlich rechts und unterhalb desselben. Er ist dann durch eine Schleife um den Pol zu ergänzen

(Figg. 15 a, b, c). Im ersten Fall (Fig. 15a) liefert die Integration ein oszillierendes Glied, dessen Amplitude bis etwa $\frac{1}{2}$ der schließlichen Amplitude zunimmt (Fig. 15b). Dann

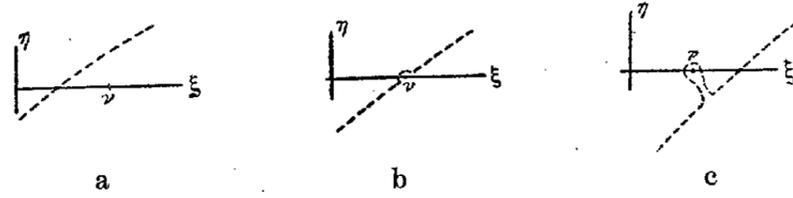


Fig. 15.

muß man einen festen oszillierenden Ausdruck, der die schließliche Amplitude hat und gegeben ist durch die Schleife, superponieren einem Ausdruck mit negativem Vorzeichen, dessen Amplitude von $\frac{1}{2}$ der schließlichen abnimmt bis zu sehr kleinen Werten, und der gegeben ist durch den anderen Teil des Integrationsweges. Die Figg. 16 u. 17 stellen diese verschiedenen Ausdrücke und ihre Superposition graphisch dar.

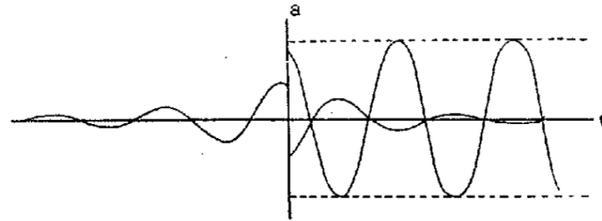


Fig. 16.

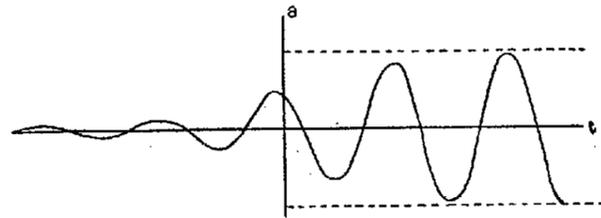


Fig. 17.

In der Tat, wenn der Integrationsweg ganz in der Nähe des Poles verläuft, liefern seine entfernteren Teile einen zu vernachlässigenden Beitrag; es genügt die unmittelbare Nachbarschaft des Poles zu berücksichtigen. Man kann dann im Integral

$$\frac{1}{2\pi} \Re \int \frac{e^{-i(nt-kx)}}{n-\nu} dn.$$

$nt - kx$ als konstant betrachten gleich $\nu t - kx$, wobei (vgl. Gleichung 7)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} (1 + i\kappa).$$

Sind ρ, ω Polarkoordinaten um ν , so wird

$$\frac{dn}{n - \nu} = i d\omega$$

und für das Integral folgt

$$\Re \left(i e^{-i(\nu t - \frac{2\pi}{\lambda} x)} e^{-\frac{2\pi\kappa}{\lambda} x} \frac{1}{2\pi} \int d\omega \right) = e^{-2\pi\kappa \frac{x}{\lambda}} \sin \left(\nu t - 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \frac{\omega}{2\pi}.$$

Für die volle Schleife ist $\omega/2\pi = 1$. Das erste Glied stellt also die schließliche Schwingung dar. Für den Weg in Fig. 15b hat man $\omega/2\pi = \frac{1}{2}$, was die vorausgehenden Behauptungen rechtfertigt. Ich werde nicht die vollständige Berechnung der Integration in der Nähe des Poles geben, die ziemlich ermüdend ist und nichts mehr liefert, als die eben angestellten Überlegungen.

Wir sehen also, daß in dem Moment, wo der Integrationsweg den Pol trifft, die Intensität der Schwingung sehr rasch zunimmt; vorher war sie sehr klein (vgl. unten die Größenordnung der Vorläufer) und wird nun von der Größenordnung der schließlichen Intensität. Wir haben in diesem Moment die Ankunft des Signals, die uns erlaubt eine *Signalgeschwindigkeit zu definieren*. Von dieser werden wir namentlich zeigen, daß sie der Gruppengeschwindigkeit gleich ist, wenn wir

weit vom Verzweigungsschnitt entfernt sind, d. h. wenn das Signal eine von der Eigenperiode des Mediums stark abweichende Schwingungsdauer hat.

Der Sattelpunkt C verschiebt sich mit zunehmender Zeit im Sinne wachsender Zeit ξ (Fig. 18) auf einer Geraden, die zur reellen Achse parallel ist und kleinen Abstand von ihr hat

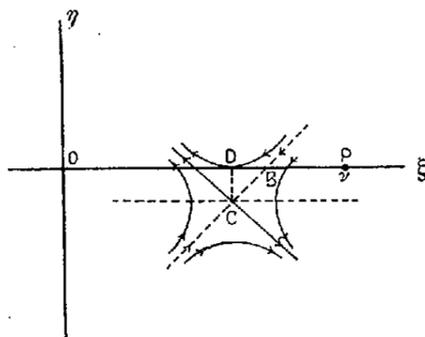


Fig. 18.

($CD = \frac{2}{3} \rho$ sehr klein gegenüber der Abszisse ξ_p [vgl. Fig. 5]). Von den Fallinien durch den Sattelpunkt, die unter 45° geneigt sind, ist die eine unser Integrationsweg; sie schneide die reelle Achse in B . Zeichnen wir die Fallinien in der Umgebung des Sattelpunktes, so sieht man, daß eine von ihnen

die reelle Achse im Punkte D berührt, der dieselbe Abszisse hat wie der Sattelpunkt C .

Nach Definition ist der Zeitpunkt der Ankunft des Signals der, in dem der Punkt B den Pol P erreicht. Die Entfernung $DB = CD$ ist sehr klein. Ich will zeigen, daß das Signal mit einer der Gruppengeschwindigkeit genau gleichen Geschwindigkeit ankäme, wenn wir die Ankunft des Signals definierten durch den Zeitpunkt, wo der Pol P vom Punkte D erreicht wird.

In der Tat ist auf der reellen Achse (n reell) $k = k_r + i k_i$; wenn man den reellen und imaginären Teil trennt, wird

$$w = -i(nt - kx) = -k_i x - i(nt - k_r x) = \frac{x}{c}(X + iY).$$

In D ist die reelle Achse Tangente an eine Fallinie für X , die dazu senkrechte Richtung ist also Niveaulinie für X :

$$\frac{\partial X}{\partial \eta} = 0 = -\frac{\partial Y}{\partial \xi},$$

daher

$$t - \frac{dk_r}{dn} x = 0$$

oder

$$t - \frac{x}{U} = 0$$

wo U die Gruppengeschwindigkeit bedeutet. Nun ist die Abszisse des Poles P gleich ν , der Frequenz des Signals. U_ν sei die zu ν gehörige Gruppengeschwindigkeit; der Pol wird vom Punkte D erreicht zur Zeit $t = x/U_\nu$, wo x die vom Signal durchlaufene Strecke ist. Würde dieser Zeitpunkt die Ankunft des Signals definieren, so hieße dies, das Signal breitet sich mit Gruppengeschwindigkeit aus.

Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines Signals, dessen Frequenz in das Gebiet anomaler Dispersion fällt, vgl. § 6.

Die Signalgeschwindigkeit definiert also den Moment der Ankunft des Signals mit merklicher Amplitude, während die Phasengeschwindigkeit nur die Anordnung der Phasen im Signal bestimmt (vgl. Sommerfeld, l. c. § 4).

§ 5. Die Vorläufer.

Im vorausgehenden Paragraphen haben wir die Lage der Sattelpunkte berechnet und gezeigt, wie der Integrationsweg in ihnen verläuft, und wollen nun die Berechnung des Integrals in der Nähe der Sattelpunkte ausführen. Während das Passieren des Integrationsweges über den Pol uns die Signalgeschwindigkeit geliefert hat, wird die Integration in der Nähe der Sattelpunkte untergeordnete Glieder liefern, die Vorläufer, deren Intensität sehr schwach ist im Vergleich zu der des Signals. Wir führen die Rechnung in derselben Reihenfolge aus, in der wir in § 3 die Lage der Sattelpunkte bestimmt haben.

A. Sattelpunkte in der Umgebung des Anfangspunktes.

Fall A1. Für $\delta' < \frac{4}{3} A \rho^2$ haben wir zwei Sattelpunkte auf der imaginären Achse gefunden. Der Integrationsweg geht durch den Sattelpunkt mit der Ordinate (vgl. Formel 13, Fig. 4)

$$\eta_p = -\frac{2}{3}\rho + \frac{1}{3}\sqrt{4\rho^2 - \frac{3\delta'}{A}}$$

parallel zur reellen Achse. Wir setzen in der Nähe des Sattelpunktes, wenn ξ eine kleine reelle Größe bedeutet,

$$n = i\eta_p + \xi,$$

und entwickeln in der Nähe dieses Sattelpunktes die Funktion aus Gleichung (12); die Glieder erster Ordnung verschwinden ($dv/dn = 0$ im Sattelpunkt) und die Glieder zweiter Ordnung sind reell, da wir auf einer Fallinie für X (d. h. auf einer Kurve $Y = \text{const.}$) bleiben. Man findet so

$$v = v_p - B\xi^2,$$

wobei

$$v_p = \eta_p (\delta' + A\eta_p(\eta_p + 2\rho)),$$

$$B = A(3\eta_p + 2\rho).$$

v_p , der Wert der Funktion v im Sattelpunkt ist reell, $v_p = X_p$, $Y_p = 0$, was wir noch benutzen werden. Dies Resultat ist übrigens leicht verständlich und gilt auch für Sattelpunkte in großer Entfernung vom Anfangspunkt, für die die angenäherte Formel (11) unexakt wäre. Der Sattelpunkt liegt nämlich auf der imaginären Achse, die Fallinie, die wir als Integrationsweg benutzen, geht durch ihn hindurch und verläuft symmetrisch zur imaginären Achse. Auf dieser Kurve muß Y einerseits

konstant bleiben (§ 1), andererseits nimmt es für Punkte symmetrisch zur imaginären Achse entgegengesetzt gleiche Werte an (vgl. Anfang des § 4); es ist also notwendig $Y = 0$.

Nun ist in der Umgebung des Sattelpunktes das Integral f zu berechnen:

$$(18) \quad f = \frac{1}{2\pi} \Re \int \frac{e^{\frac{x}{c}v}}{n-v} dn = \frac{e^{\frac{x}{c}v_p}}{2\pi} \int_{+\varepsilon}^{-\varepsilon} \frac{e^{-\frac{x}{c}B\xi^2}}{n-v} d\xi.$$

Damit die Näherungsmethode zulässig sei, müssen die Grenzen $\pm \varepsilon$, zwischen denen ich das Integral nehme, klein sein in bezug auf andere Größen in der n -Ebene, z. B. n_0 . Am Ende des § 3 habe ich gezeigt, daß folgende Größenordnungen zulässig sind:

$$v = 4 \cdot 10^{15}, \quad n_0 = 4 \cdot 10^{16}, \quad A = \frac{1}{5} \cdot 10^{-33}.$$

Andererseits fordert die angenäherte Formel für den Brechungsindex, daß im Sattelpunkt η_p^2 sehr klein sei gegen n_0^2 . Nehmen wir $\eta_p = 2 \cdot 10^{-2} n_0 \sim 10^{15}$, so findet man

$$B = 3 A \eta_p = \frac{3}{5} \cdot 10^{15-33} = \frac{3}{5} \cdot 10^{-18},$$

und
$$\frac{x}{c} B = x \frac{3}{3 \cdot 5} \cdot 10^{-18-10} = 2x \cdot 10^{-29}.$$

Die Näherung wird gültig sein, wenn ich ein gegen n_0 kleines ε so finden kann, daß die Exponentialfunktion $e^{-\frac{x}{c}B\varepsilon^2}$ praktisch Null ist. Es genügt anzunehmen

$$\frac{x}{c} B \varepsilon^2 = 5.$$

Setzen wir die vom Licht durchlaufene Strecke $x = 1$ cm, so erfordert dies:

$$2 \cdot \varepsilon^2 \cdot 10^{-29} = 5, \quad \varepsilon^2 = 25 \cdot 10^{28},$$

$$\varepsilon = 5 \cdot 10^{14} = \frac{n_0}{100}.$$

Für eine Tiefe $x = 100$ cm findet man $\varepsilon = 5 \cdot 10^{13} = n_0/1000$. Diese Werte sind aber zulässig für unsere Rechnung.

$n - v$ wird in diesen Grenzen als konstant betrachtet:

$$\frac{1}{n-v} = \frac{1}{i\eta_p - v} = -\frac{v + i\eta_p}{v^2 + \eta_p^2},$$

und es bleibt nur das Integral auszuwerten

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-\frac{x}{c} B \xi^2} d\xi = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi \cdot c}{Bx}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{\pi Bx}}.$$

Nimmt man den reellen Teil, so findet man endlich aus (18)

$$f = \frac{\nu}{2(\rho^2 + \eta_p^2)} \sqrt{\frac{c}{\pi Bx}} e^{\frac{x}{c} v_p}.$$

Wir wollen die Größenordnung von f untersuchen und seine Änderung mit der Zeit. Die Wurzel ist von der Größenordnung $\frac{4}{3} 10^{14}$, sie nimmt langsam zu; der erste Faktor ist von der Ordnung $1/2 \nu$, also ungefähr $\frac{1}{3} \cdot 10^{-15}$; das Produkt beider Faktoren wird von der Ordnung $\frac{1}{60}$ und nimmt zu mit der Zeit. Es bleibt noch zu untersuchen, wie der Exponent sich verhält; wir haben

$$\frac{x}{c} v_p = \frac{x}{c} [\eta_p \delta' + A \eta_p^2 (\eta_p + 2\rho)],$$

wobei

$$\eta_p = -\frac{2}{3}\rho + \frac{1}{3}\sqrt{4\rho^2 - \frac{3\delta'}{A}};$$

η_p ist also von der Größenordnung von $\sqrt{\frac{|\delta'|}{3A}}$; dies gibt

$$\frac{x}{c} v_p \sim \frac{2}{3} \frac{x}{c} \eta_p \delta'.$$

Dies ist eine negative Größe von großem absoluten Betrag ($(x/c)\delta' < 0$, η_p groß), die für $\delta' = 0$ gegen Null geht. Unsere Annäherung gibt nicht ihre genaue Änderung für $\delta' = 0$.

Im ganzen ist die Funktion f zunächst nahezu Null, nimmt dann zu, um für $\delta' = 0$ einen immer noch sehr kleinen Wert anzunehmen:

$$f_{\delta'=0} = \frac{1}{2\nu} \sqrt{\frac{c}{2\pi\rho x A}}.$$

Den Wert von f für Zeiten $\delta' \sim \frac{4}{3} A \rho^2$ will ich nicht berechnen, es findet ein allmählicher Übergang der nicht oszillierenden hier gefundenen Funktion zu der oszillierenden Funktion statt, die wir für $\delta' > \frac{4}{3} A \rho^2$ finden werden. f behält übrigens die Größenordnung von $f_{\delta'=0}$.

Fall A 2. Wenn $\delta' > \frac{4}{3} A \rho^2$, haben wir zwei zur imaginären Achse symmetrische Sattelpunkte (vgl. Fig. 5):

$$n = -i\frac{2}{3}\rho \pm \xi_p$$

(vgl. Formel 14). Der Integrationsweg hat in ihnen die Richtung von Geraden, die unter 45° geneigt sind. Wir setzen also in der Umgebung dieser Sattelpunkte

$$n = -i \frac{2}{3} \rho \pm \xi_p + (1 \pm i) \varepsilon,$$

daher

$$dn = (1 \pm i) d\varepsilon = \sqrt{2} e^{\pm i \frac{\pi}{4}} d\varepsilon.$$

Wie in dem bereits behandelten Fall nimmt der Exponent v in der Nähe des Sattelpunktes die Form an

$$v = v_p - C\varepsilon^2.$$

Man findet

$$\begin{aligned} v_p &= -\delta' \left(\frac{2}{3} \rho \pm i \xi_p \right) + i A \left(\pm \xi_p - i \frac{2}{3} \rho \right)^2 \left(\pm \xi_p + i \frac{4}{3} \rho \right), \\ v_p &= X_p \pm i Y_p, \quad C = 6 A \xi_p, \\ X_p &= \frac{2}{3} \rho \left(-\delta' + \frac{8}{9} A \rho^2 \right), \quad Y_p = \xi_p \left(-\delta' + A \left(\xi_p^2 + \frac{4}{3} \rho^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Wir haben nun das Integral $\frac{1}{2\pi} \Re \int \frac{e^{\frac{x}{c} v}}{n - v} dn$ zu bilden für die unmittelbare Nähe der genannten Sattelpunkte. Der Koeffizient C hat dieselbe Größenordnung wie im vorausgehenden Fall der Koeffizient B . In erster Annäherung betrachten wir den Faktor $1/n - v$ für jedes der zu den beiden Sattelpunkten gehörigen Integrale als konstant und setzen ihn mit dem konstanten Faktor $e^{\frac{x}{c} v_p}$ vor das Integralzeichen. Es bleibt dann für den einen oder anderen Sattelpunkt das Integral

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{2} e^{\pm i \frac{\pi}{4}} \int_{+\alpha}^{-\alpha} e^{-\frac{x}{c} C \varepsilon^2} d\varepsilon,$$

wo α eine kleine Größe ist. In Rücksicht auf die Größe von C hat das Integral denselben Wert als wenn α unendlich wäre, nämlich

$$-\frac{1}{2\pi} \sqrt{2} e^{\pm i \frac{\pi}{4}} \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{c}{x C}} = -\frac{1}{2} e^{\pm i \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{c}{3\pi \xi_p x A}},$$

wenn man C durch seinen Ausdruck ersetzt. Die Integration in der Umgebung der beiden Sattelpunkte ergibt also im ganzen

$$f = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{e}{3\pi\xi_p x A}} \Re \left\{ \frac{e^{\frac{x}{c}(X_p + iY_p)}}{-i\frac{2}{3}\rho + \xi_p - \nu} e^{+i\frac{\pi}{4}} + \frac{e^{\frac{x}{c}(X_p - iY_p)}}{-i\frac{2}{3}\rho - \xi_p - \nu} e^{-i\frac{\pi}{4}} \right\}$$

Nach einigen elementaren Umrechnungen erhält man schließlich

$$(19) \quad f = \frac{\nu \sqrt{\frac{e}{3\pi\xi_p x A}} e^{\frac{x}{c}X_p}}{(\nu^2 + \xi_p^2 + \frac{4}{9}\rho^2) - 4\nu^2\xi_p^2} \left\{ (\nu^2 - \xi_p^2 + \frac{4}{9}\rho^2) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{c}Y_p\right) + \frac{4}{3}\rho\xi_p \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{c}Y_p\right) \right\}.$$

Der Exponent $(x/c)X_p$ ist immer negativ, sein absoluter Wert wächst mit der Zeit ungefähr wie $+\frac{2}{3}(x/c)\rho\delta' = +\frac{2}{3}\rho t'$.

Die Exponentialgröße $e^{\frac{x}{c}X_p}$, die zunächst ($\delta' = 0$) nahe an 1 ist, nimmt daher allmählich ab und geht gegen Null, wenn sich die Sattelpunkte den Verzweigungsschnitten nähern. Die Wurzel ändert sich in demselben Sinne mit der Zeit. Den anderen Faktor werden wir, um sein Verhalten besser übersehen zu können, etwas vereinfachen, indem wir ρ^2 gegen $\nu^2 - \xi_p^2$ vernachlässigen, was immer erlaubt ist, außer wenn der Sattelpunkt in der Nähe des Poles ν liegt. Man findet dann

$$(19') \quad f = \frac{\nu}{\nu^2 - \xi_p^2} \sqrt{\frac{e}{3\pi\xi_p x A}} e^{\frac{x}{c}X_p} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{c}Y_p\right) + \frac{4}{3}\rho \frac{\xi_p}{\nu^2 - \xi_p^2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{c}Y_p\right) \right\}.$$

Man sieht, daß im allgemeinen das cos-Glied überwiegt, wenn aber der Sattelpunkt sich dem Pol nähert, ergibt sich eine Änderung in der Phase, das sin-Glied darf dann nicht vernachlässigt werden. Der Faktor $\nu/(\nu^2 - \xi_p^2)$, der im allgemeinen von der Ordnung $1/\nu$, also sehr klein ist, wird sehr groß, wenn der Sattelpunkt in die Nähe des Poles rückt.

Ich will nun die augenblickliche Frequenz $\omega = 2\pi/T$ dieser Schwingungsbewegung suchen, die willkürlich definiert sei als zeitliche Ableitung der Phase, wenigstens wenn das cos-Glied überwiegt, ξ_p also von ν stark abweicht:

$$\omega = \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{c}Y_p \right) = \frac{dY_p}{d\theta} = \frac{dY_p}{d\delta'};$$

nun ist

$$\xi_p^2 = \frac{1}{9} \left(\frac{3\delta'}{A} - 4\rho^2 \right) = \frac{1}{3} \frac{\delta'}{A},$$

wenn ρ^2 gegen δ'/A vernachlässigt wird; daher

$$Y_p = -\frac{2}{3} \xi_p \delta' = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \frac{\delta'^{3/2}}{A^{1/2}},$$

$$\omega = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\delta'^{1/2}}{A^{1/2}} = -\xi_p.$$

Die augenblickliche Frequenz ist also gleich der Abszisse ξ_p des Sattelpunktes, d. h. nach obigem (Ende des § 4) gleich der Frequenz einer Schwingungsbewegung, deren Gruppengeschwindigkeit x/t ist.

Wir berechnen die Größenordnung der Amplitude der Schwingung, indem wir dieselben Größenordnungen zugrunde legen wie im vorausgehenden Fall:

$$\xi_p = 2 \cdot 10^{-2} n_0 = 10^{15},$$

$$C = 2B, \quad \frac{1}{2} \frac{x}{c} C = 2x \cdot 10^{-29}.$$

Die Amplitude ist bis auf den Exponentialfaktor

$$\frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{2c}{\pi Cx}} = \frac{1}{30}.$$

Die Vorläufer haben also eine Amplitude von der Ordnung $\frac{1}{30}$, d. h. eine Intensität von der Ordnung $\frac{1}{1000}$ von der des Signals. Diese Intensität hängt übrigens direkt von der Verteilung der Intensität im Spektrum des anfänglichen Signals ab. In der Tat tritt in der Amplitude der betrachteten Schwingung der Faktor

$$\frac{\nu}{\nu^2 - \xi_p^2}$$

auf, der bis auf den Zahlenfaktor $-1/\pi$ die Amplitude der Schwingung von der Frequenz ξ_p im anfänglichen Signal darstellt (vgl. Sommerfeld, l. c. § 2):

$$\frac{\nu}{\nu^2 - \xi_p^2} = -\pi \frac{2}{\tau} \frac{1}{\xi_p^2 - \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2}.$$

Den Ausdruck (19') können wir auch in anderer Form schreiben, in der nur die Größen x und t' vorkommen. Diese Darstellung gilt jedoch nur angenähert für Sattelpunkte, die dem Anfangspunkt und dem Pol ν nicht zu nahe liegen. Wir benutzen die oben aufgestellte angenäherte Beziehung

$$\xi_p = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3 \delta'}{A}} = \sqrt{\frac{c t'}{3 A x}},$$

und erhalten aus (19):

$$(19'') \quad f = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{c}{3 A x t'} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{v}{v^2 - \frac{c t'}{3 A x}} e^{-\frac{2}{3} e t'} \left\{ \cos \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{c}{3 A x}} t'^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{4}{3} \frac{v \sqrt{\frac{c t'}{3 A x}}}{v^2 - \frac{c t'}{3 A x}} \sin \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{c}{3 A x}} t'^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\}.$$

Die Integration in der Nähe der dem Anfangspunkt benachbarten Sattelpunkte hat uns also eine Schwingungsbewegung folgender Art geliefert:

Bis zu Zeiten nahe an $t' = \frac{x}{c} \delta' = 0$ ($t = x n_2 / n_0 c$) keine merkliche Bewegung, bei t' nahezu $= 0$ eine leichte Verschiebung, dann für $t' > 0$ eine Schwingungsbewegung von sehr kleiner Amplitude, deren Frequenz von Null an wächst. Die Amplitude nimmt sehr rasch zu, wenn die Frequenz dieser Vorläufer sich der des Signals nähert. Das Signal kommt nahezu mit Gruppengeschwindigkeit an und nimmt sehr rasch seine endgültige Amplitude an. Doch ist es noch einige Zeit durch die Vorläufer deformiert, deren Amplitude sehr schnell abnimmt, während gleichzeitig ihre Frequenz weiter wächst. Nähert sich diese der Eigenfrequenz der schwingenden Elektronen im Medium, so wird die Amplitude ihrer Schwingungsbewegung unmerklich.

Dies gilt für den Fall $0 < v < n_0$, d. h. für ein sichtbares Signal und für eine Eigenperiode der Elektronen im Ultravioletten.

Den eben gefundenen Teil der Vorläufer werde ich die zweiten Vorläufer nennen; die Integration in der Nähe der in großer Entfernung liegenden Sattelpunkte wird uns die ersten Vorläufer liefern.

B. Sattelpunkte in großer Entfernung.

Wir haben gesehen, daß für sehr kleine Zeiten δ ein Sattelpunkt auf der imaginären Achse zu berücksichtigen wäre

und daß zwei weitere symmetrisch zu dieser Achse liegen in den Punkten (vgl. Gleichung 17, Fig. 7)

$$\xi_p = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{2} \delta}, \quad \eta_p = -2 \rho.$$

Die Integration in der Nähe des Sattelpunktes auf der imaginären Achse liefert, da er sehr flach ist, einen unmerklichen Beitrag. Ich habe bereits gezeigt (Fall A 1), daß das Integral in der Nähe dieses Punktes zu vernachlässigen ist, außer wenn er dem Anfangspunkt sehr nahe liegt; auch wurde schon erwähnt, daß auf der Falllinie durch diesen Sattelpunkt, d. h. auf unserm Integrationsweg Y verschwindet.

Wir beschäftigen uns also nur mit den beiden anderen Sattelpunkten, in denen der Integrationsweg als Gerade unter 45° verläuft. Wir setzen daher in der Umgebung dieser Punkte

$$n = -2i\rho \pm \xi_p + (1 \mp i)\varepsilon$$

$$dn = (1 \mp i)d\varepsilon = \sqrt{2} e^{\mp i\frac{\pi}{4}} d\varepsilon,$$

und finden für v die Entwicklung

$$v = v_p - D\varepsilon^2 = -\rho \frac{\alpha^2}{\xi_p^2} \mp i \frac{\alpha^2}{\xi_p} - \frac{\alpha^2}{\xi_p^3} \varepsilon^2.$$

Für diese Sattelpunkte haben wir die Grenzen $\pm \alpha$ im Integrale

$$\frac{1}{2\pi} \Re \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{e^{\frac{x}{c}v}}{n-v} dn$$

so zu wählen, daß $e^{-\frac{x}{c}D\varepsilon^2}$ an diesen Grenzen verschwindet. Die Näherungsmethode ist dann gültig, wenn α klein gewählt werden kann in bezug auf ξ_p . Um dies an einem Zahlenbeispiel zu zeigen, setzen wir

$$\xi_p = 10 \cdot n_0, \quad \alpha = n_0 = 4 \cdot 10^{16},$$

$$D = \frac{\alpha^2}{\xi_p^3} = \frac{1}{4} \cdot 10^{-16} \cdot 10^{-3} = \frac{1}{4} 10^{-19}, \quad \frac{x}{c} D = 10^{-30}.$$

Die Exponentialfunktion ist praktisch Null, wenn $-(x/c)D\varepsilon^2$ etwa -10 beträgt. Dazu ist erforderlich

$$10^{-30} \cdot \varepsilon^2 = 10, \quad \varepsilon = 3 \cdot 10^{15},$$

also von der Größenordnung $\xi_p/100$, was wohl zulässig ist. Die Näherung gilt, wenn die Abszisse ξ_p des Sattelpunktes größer ist als n_0 , ohne jedoch zu große Werte anzunehmen, was für Zeiten t ganz nahe an Null der Fall wäre (vgl. (17)).

Betrachten wir den Faktor $1/n - \nu$ als konstant und setzen ihn vor das Integralzeichen, so bleibt das Integral auszuwerten

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a^2}{\xi_p^2} \frac{x}{c} \varepsilon^2} d\varepsilon = -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{c \pi \xi_p^3}{x}}.$$

Je nachdem es sich um den einen oder anderen Sattelpunkt handelt, ist dieser Ausdruck zu multiplizieren mit

$$\frac{\sqrt{2} e^{\mp i \frac{\pi}{4}} e^{\frac{x}{c} \nu_p}}{n_p - \nu} = \sqrt{2} \frac{e^{-\frac{a^2}{\xi_p^2} \frac{x}{c} \mp i \left(\frac{a^2}{\xi_p} \frac{x}{c} + \frac{\pi}{4} \right)}}{-2i \rho \pm \xi_p - \nu};$$

dann hat man die Summe beider Glieder zu nehmen und zum reellen Teil überzugehen und findet so

$$(20) \quad f = -\sqrt{2} \frac{\nu}{a} \left(\frac{c}{\pi \xi_p x} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-2e t} \cos \left(\frac{a^2}{\xi_p} \frac{x}{c} + \frac{\pi}{4} \right),$$

oder, wenn man statt ξ_p nach Formel (17) überall t einführt:

$$(20') \quad f = -\frac{\nu}{\sqrt{\pi a^3}} \left(\frac{2c}{x} \right)^{3/4} t^{1/4} e^{-2e t} \cos \left(a \sqrt{\frac{2x}{c}} t + \frac{\pi}{4} \right).$$

Die ersten Vorläufer kommen also mit Vakuumgeschwindigkeit an, denn sie setzen ein für $t = t - x/c = 0$. Ihre Schwingungsdauer ist zuerst sehr klein und wächst allmählich. Definieren wir wie bei den zweiten Vorläufern eine augenblickliche Frequenz, so sieht man leicht, daß diese auch hier in jedem Moment gleich ist der Abszisse ξ_p des Sattelpunktes. Die Amplitude ist zunächst Null, nimmt dann zu und (bei Berücksichtigung der Dämpfung) wieder ab wie der Faktor $t^{1/4} e^{-2e t}$.

Für den Fall des gewählten numerischen Beispiels findet man die Amplitude von der Ordnung $2 \cdot 10^{-3}$, die Intensität also von der Ordnung $4 \cdot 10^{-6}$.

Die hier angegebenen Annäherungen verlieren ihre Gültigkeit für sehr kleine t , d. h. für sehr entfernte Sattelpunkte. Die ersten Vorläufer sind nämlich gegeben durch den Ausdruck

$$f = \frac{\nu}{a} \sqrt{\frac{2ct}{x}} J_1 \left(2a \sqrt{\frac{xt}{2c}} \right),$$

wie Hr. Sommerfeld gezeigt hat (l. c. Formel 33). Ersetzt man die Besselsche Funktion durch ihren asymptotischen Ausdruck, so findet man unsere Formel (20'), die daher nur für nicht zu kleine t -Gültigkeit beanspruchen kann. Der Faktor e^{-2ct} fehlt, da die Formel von Hrn. Sommerfeld unter der Voraussetzung $\rho = 0$ abgeleitet wurde. Geht man auf die Größenordnungen, wie sie am Ende des § 3 gegeben wurden, zurück, so überzeugt man sich, daß man in den dortigen Beispielen ρ gegen n_0 nicht vernachlässigen darf.

§ 6. Signalgeschwindigkeit.

Im vorausgehenden Paragraphen habe ich die Vorläufer berechnet und an Zahlenbeispielen gezeigt, daß ihre Intensität sehr gering ist im Vergleich mit der des eigentlichen Signals. Ich will mich nun mit der Signalgeschwindigkeit beschäftigen. Gegen Ende des § 4 wurde gezeigt, daß in dem Moment, in dem der Integrationsweg den Pol trifft, die Amplitude der Schwingungsbewegung merklich wird — von der Größenordnung der halben endgültigen Amplitude. Man kann also, übrigens willkürlich, die *Ankunft des Signals durch den Moment definieren, in dem der Pol ν vom Integrationsweg erreicht wird.*

Alle diese Überlegungen bezogen sich auf den Fall, wo ν stark verschieden ist von n_0 , d. h. auf den Fall normaler Dispersion. Es scheint sinngemäß an der vorstehenden Definition *in allen Fällen festzuhalten, auch wenn das Signal eine Schwingungsdauer im Gebiet der anomalen Dispersion hat.*

Da ν als wirkliche Frequenz eine reelle positive Zahl ist, liegt der Pol ν immer auf der ξ -Achse zwischen 0 und $+\infty$.

Zeichnen wir die komplexe Ebene für ein Signal, wie es in der Tiefe x zur Zeit t beobachtet wird (Figg. 8—14), so hängt die so erhaltene Figur nur ab von der Größe

$$v = -in(\Theta - \mu) = X + iY$$

(vgl. Gleichung 4), sie ist also unabhängig von der Frequenz ν des Signals; sie ist dieselbe für eine andere Tiefe x' zu einer Zeit t' , die die Bedingung erfüllt (vgl. Gleichung 4a)

$$(21) \quad \Theta = \Theta', \quad \frac{tc}{x} = \frac{t'c}{x'}.$$

Die reelle positive Achse schneidet den Integrationsweg in den Punkten B_1, B_2, \dots mit den Abszissen ν_1, ν_2, \dots (vgl. z. B. Figg. 13 u. 14). Nach der eben eingeführten Definition wird ein Signal von der Frequenz ν_1 in dem der Figur entsprechenden Augenblick t eine merkliche Intensität annehmen. Die Beziehung (21) zeigt, daß die Zeit t der Tiefe x proportional ist; das Signal breitet sich also mit konstanter Signalgeschwindigkeit S aus. Man hat

$$t = \frac{x}{S}, \quad \Theta = \frac{ct}{x} = \frac{c}{S},$$

die reduzierte Zeit Θ mißt also das Verhältnis der Vakuumgeschwindigkeit zur Signalgeschwindigkeit für die Frequenz ν_1 . Die Figg. 10—14 zeigen die Verschiebung der Punkte B_1, B_2, \dots mit zunehmendem Θ . Trägt man zu den Abszissen ν_1, ν_2, \dots die Ordinaten $c/S = \Theta$ auf, so erhält man eine Kurve, die in Fig. 19 eingetragen ist; den Punkten B entsprechen dabei die Punkte b , die dieselbe Abszisse haben.

In § 4 wurde gezeigt, daß für einen Punkt D (Fig. 18) der komplexen Ebene, in dem eine Fallinie für x die reelle Achse berührt,

$$t = \frac{x}{U}, \quad \Theta = \frac{c}{U},$$

wo U die Gruppengeschwindigkeit für die Frequenz $\xi = OD$. In Fig. 19 ist die Kurve c/U gezeichnet; den Punkten D entsprechen die Punkte d .

In den Figg. 10—14 kann man leicht das vollständige Netz der Fallinien ziehen und die Lage der Punkte B und D vergleichen; man findet so (vgl. § 4 Fig. 18), daß ein dem Verzweigungsschnitt nicht zu naher Sattelpunkt ganz in der Nähe der beiden Punkte B und D liegt, die selbst sehr nahe aneinander liegen (z. B. B und D Fig. 18, $B_1 D_1$ und $B_4 D_4$ Fig. 13, $B_1 D_1$ Fig. 14). Das heißt aber, daß in größerer Entfernung vom Gebiete anomaler Dispersion die Kurven c/S und c/U übereinstimmen, daß also die Signalgeschwindigkeit gleich der Gruppengeschwindigkeit ist (vgl. Ende des § 4). Dies gilt nicht mehr, wenn die Sattelpunkte in die Nähe des Verzweigungsschnittes rücken. Aber immer noch gibt die gegenseitige Lage

der Punkte B und D Aufschluß über die Lage der unbekanntenen Kurve der Signalgeschwindigkeit zu der bekannten der Gruppengeschwindigkeit.

Der Integrationsweg schneidet zunächst die reelle Achse in zwei Punkten B_3, B_4 , zwischen denen ein Punkt D_3 liegt (vgl. Fig. 13). Für einen bestimmten Zeitpunkt berührt er die reelle Achse, die Punkte B_3, B_4 und D_3 fallen zusammen, ebenso in Fig. 19 die Punkte b_3, b_4 und d_3 . Von diesem Zeitpunkt an trifft dieser Teil des Integrationsweges die reelle Achse nicht mehr (Fig. 14). Dies bedeutet, daß die Maxima der Kurve c/S die Schnittpunkte der Kurven c/S und c/U sind.

Der Integrationsweg, der als Fallinie über die Sattelpunkte gewählt wurde, setzt sich aus mehreren Teilen zusammen, deren jeder über einen einzigen Sattelpunkt geht (Fig. 10—14):

1. Teil: $+\infty > \xi > \xi_\infty$ von $+\infty$ bis zum Punkt U_1
2. Teil: $\xi_\infty > \xi > -\xi_\infty$ von U_1 bis U_2
3. Teil: $-\xi_\infty > \xi > -\infty$ von U_2 bis $-\infty$.

Für den Fall A2 (§ 3):

$$\delta' > \frac{4}{3} A \rho^2$$

zerfällt der zweite Teil selbst wieder in zwei Teile (Fig. 13 und 14).

Der imaginäre Teil Y des Exponenten v bleibt auf dem Integrationsweg als auf einer Fallinie für X konstant, es ist also für jeden Teil

$$Y = Y_p.$$

Bei Berechnung der Integrale in der Nähe der Sattelpunkte in § 5 habe ich die zugehörigen Werte von Y angegeben:

1. Teil: Sattelpunkt in großer Entfernung (§ 5 Fall B):

$$Y_p = -\frac{a^2}{\xi_p} = -a\sqrt{2\delta}$$

2. Teil: Sattelpunkt in der Umgebung des Anfangspunktes:

$$(22) \left\{ \begin{array}{l} \text{Fall A 1: } \delta' \leq \frac{4}{3} A \rho^2: Y_p = 0, \\ \text{Fall A 2: } \delta' > \frac{4}{3} A \rho^2: Y_p = \xi_p \left(-\delta' + A(\xi_p^2 + \frac{4}{3} \rho^2) \right) \cdot \\ \left(\xi_p = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3\delta'}{A} - 4\rho^2} \right). \end{array} \right.$$

Nun sollen die Punkte B_2, B_3 berechnet werden, wo unser Integrationsweg die reelle Achse in der Nähe des Verzweigungsschnittes UN schneidet (Fig. 13). Auf der reellen Achse (n reell) ist nach (4)

$$(23) \quad Y = -n(\Theta - \mu_r) = -n\left(\Theta - \frac{c}{V}\right);$$

wobei $\mu_r =$ Brechungsindex, $V =$ Phasengeschwindigkeit für die Frequenz n . Die Kurve $\mu_r = c/V$ ist bekannt, sie ist auch in Fig. 19 eingetragen. Um B_2, B_3 zu finden, hat man einfach

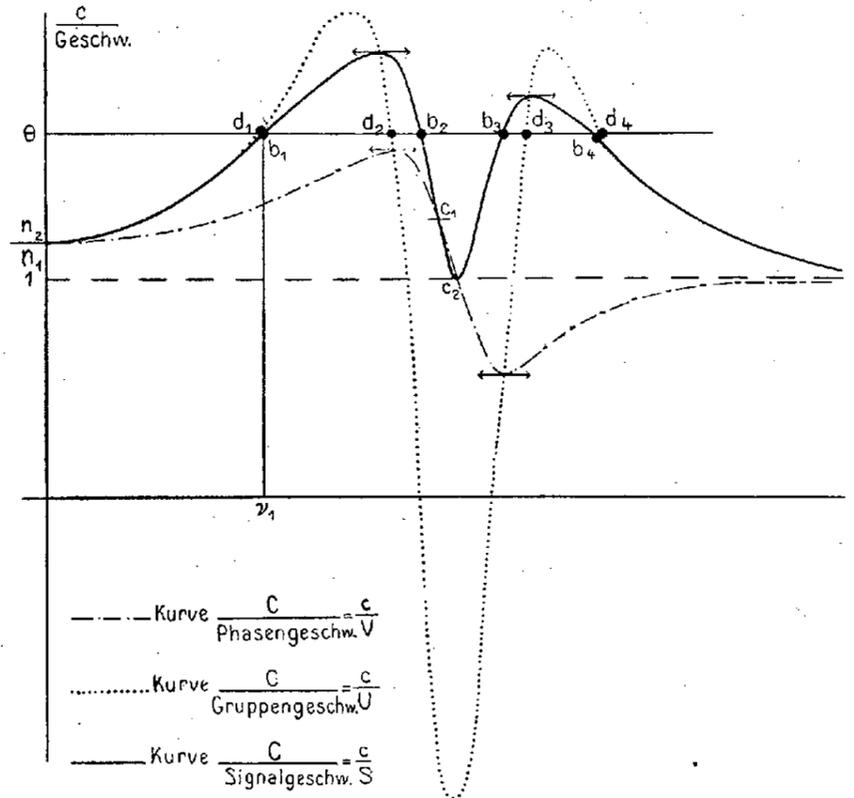


Fig. 19.

die Punkte der reellen Achse zu suchen, für die die Ausdrücke (22) und (23) übereinstimmen. Im Falle $A1$, d. h. wenn

$$\delta' \leq \frac{4}{3} A \rho^2, \quad \Theta \leq \frac{n_2}{n_0} + \frac{4}{3} A \rho^2,$$

entspricht der zweite Teil unseres Integrationsweges dem Wert $Y = 0$, er schneidet also die reelle Achse in der Nähe des Verzweigungsschnittes in einem Punkte, für den

$$\Theta - \frac{c}{V} = 0 \quad \frac{c}{S} = \Theta = \frac{c}{V}.$$

Für diese Werte Θ fällt also die Kurve c/S mit der Kurve c/V merklich zusammen (vgl. Fig. 19 das Stück c_1 bis c_2).

Insbesondere sieht man, daß es in der Nähe von n_0 eine Frequenz gibt (Punkt c_2), für die sich das Signal mit Vakuumgeschwindigkeit ausbreitet; der zugehörige Brechungsindex μ_r ist gleich der Einheit:

$$\frac{c}{V} = \frac{c}{S} = 1.$$

In allen anderen Fällen (A 2 und B, in Fig. 19 das Stück c_2 bis b_3) ist auf dem Integrationsweg

$$Y < 0,$$

daher wird für die Schnittpunkte mit der reellen Achse

$$-n\left(\Theta - \frac{c}{V}\right) < 0, \quad \Theta - \frac{c}{V} > 0$$

also

$$\frac{c}{S} > \frac{c}{V},$$

die Kurve c/S verläuft oberhalb der Kurve c/V . Nach diesen Angaben kann man die Kurve c/S ziehen, die wir untersuchen wollten.

Die Signalgeschwindigkeit unterscheidet sich nicht von der Gruppengeschwindigkeit, außer im Gebiet der anomalen Dispersion. Hier wird die Gruppengeschwindigkeit größer als die Vakuumgeschwindigkeit, wenn der reziproke Wert $c/U < 1$, sie wird sogar negativ.¹⁾ Die Signalgeschwindigkeit bleibt immer unterhalb oder wird höchstens gleich der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Die Kurve der Gruppengeschwindigkeit und die der Signalgeschwindigkeit schneiden sich in zwei Punkten, die, wie die graphische Diskussion zeigt, Maxima der Signalgeschwindigkeit sind.

Erinnert man sich, daß unsere Definition der Signalgeschwindigkeit etwas willkürlich ist, so scheint es mir sinngemäß, nicht eine Kurve, sondern einen Streifen zu zeichnen, der die Signalgeschwindigkeit darstellt, in Fig. 19 etwa durch die Dicke des Kurvenstriches angedeutet. Das Signal kommt

1) Vgl. hierüber A. Schuster, Einführung in die theoretische Optik. Leipzig 1907. Offenbar hat die Gruppengeschwindigkeit nur insofern Sinn, als sie mit der Signalgeschwindigkeit übereinstimmt; die negativen Partien der Gruppengeschwindigkeit haben keine physikalische Bedeutung.

nicht plötzlich an, man hat einen zwar raschen aber doch stetigen Übergang von der sehr geringen Intensität der Vorläufer zu der endgültigen des Signals. Ein Detektor, der auf eine Intensität gleich $\frac{1}{4}$ der schließlichen entspricht, wird die Ankunft des Signals in Übereinstimmung mit der obigen willkürlichen Definition anzeigen; ist er mehr oder weniger empfindlich, so wird man die Ankunft des Signals etwas früher oder später bemerken.

§ 7. Zusammenfassende Resultate.

Die gefundenen Resultate will ich so zusammenfassen: Ich habe die Fortpflanzung eines Signals besonderer Art im dispergierenden Medium untersucht; hat das Signal eine gewisse Tiefe im Mittel durchlaufen, so ist es abgeändert: mit der Geschwindigkeit c kommen die ersten Vorläufer an, ihre anfangs äußerst kleine Schwingungsdauer wächst fortwährend, ihre Amplitude nimmt zu und bei Berücksichtigung der Dämpfung wieder ab, bis die Schwingungsdauer die Eigenperiode der schwingenden Elektronen im dispergierenden Medium erreicht hat. Mit der Geschwindigkeit c (n_2/n_0) $< c$, die der Dielektrizitätskonstante entspricht, kommen die zweiten Vorläufer an, deren Schwingungsdauer zunächst äußerst groß ist und dann abnimmt, während die Amplitude sich ähnlich verhält wie die der ersten Vorläufer. Diese beiden Vorläufer können zum Teil sich überlagern. Ihre Amplitude ist im allgemeinen sehr klein, sie wächst sehr schnell, wenn ihre

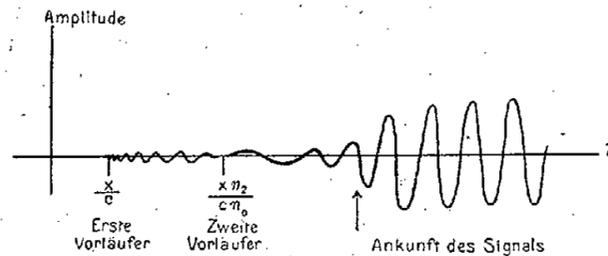


Fig. 20.

Schwingungsdauer sich der des Signals nähert. Das Signal kommt mit Signalgeschwindigkeit an; es ist noch einige Zeit deformiert durch die sich ihm überlagernden Vorläufer. Der zeitliche Verlauf der Lichtbewegung ist schematisch in Fig. 20 dargestellt für den Fall, daß die Periode des Signals größer

ist als die Eigenperiode der Elektronen im dispergierenden Mittel.

Ich will noch einige Bemerkungen über die Abhängigkeit der Intensität der Vorläufer von der Tiefe anfügen. Eine durch die augenblickliche Frequenz (vgl. p. 225) charakterisierte Schwingungsbewegung komme in der Tiefe x_1 zur Zeit t_1 , in x_2 zur Zeit t_2 an; dann ist

$$\frac{t_1}{x_1} = \frac{t_2}{x_2}, \quad \Theta_1 = \frac{t_1 c}{x_1} = \frac{t_2 c}{x_2} = \Theta_2.$$

Der Wert der reduzierten Zeit Θ , die die Dimension einer reinen Zahl hat, charakterisiert unabhängig von der Tiefe die Frequenz der Schwingungsbewegung. Auch die Abszisse ξ_p des Sattelpunktes ist von t und x nur in der Verbindung Θ abhängig. Um die Intensitäten der Vorläufer gleicher Periode für verschiedene Tiefen zu vergleichen, müssen wir die Formeln (19) (bzw. 19') und (20) benutzen, die die Größen ξ , Θ , δ oder δ' enthalten. Man sieht, daß für eine bestimmte Periode die Amplitude sich ändert wie

$$\frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{2}{3} e \frac{\delta'}{c} x} \text{ für die zweiten Vorläufer,}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} e^{-2 e \frac{\delta}{c} x} \text{ für die ersten Vorläufer.}$$

Die Vorläufer erfahren also eine gleichmäßige Intensitätsverminderung, die unabhängig von der Periode und umgekehrt proportional x ist, außerdem eine mit der Tiefe exponentiell zunehmende Absorption. Letztere ist selektiv, der Koeffizient hängt von der Periode ab; er verschwindet für die Schwingungsdauer 0 und ∞ .

Die Ausführung des folgenden Experimentes scheint mir nicht unmöglich: In ein absorbierendes Medium dringt ein Signal ein; in hinreichender Tiefe wird sowohl das Signal selbst als diejenigen seiner Vorläufer, die eine exponentielle Absorption erfahren, unmerklich sein. Man wird nur die Vorläufer mit der Schwingungszahl 0 und ∞ beobachten können.

Während ich in dieser Arbeit den Fall eines Körpers behandelt habe, der nur eine Eigenperiode, nur einen Absorptionsstreifen hat, hoffe ich, dies bald auf den Fall einer beliebigen Anzahl von Absorptionsstreifen verallgemeinern zu können; es

scheint mir gegenwärtig wahrscheinlich, daß es dann nicht nur zwei Arten von Vorläufern gibt, sondern daß zwischen zwei aufeinander folgenden Absorptionsstreifen Vorläufer mit zwischenliegender Schwingungsdauer auftreten. Während die Schwingungsdauern 0 und ∞ ziemlich schwer zu beobachten sind, wird man leicht die Vorläufer im sichtbaren Gebiet oder in dessen Nähe bemerken können.

§ 8. Anhang. Die Methode der stationären Phase.

Es sei ein Integral zu untersuchen von der Form

$$\int \varphi(n) \cos Y dn \quad \text{oder} \quad \int \varphi(n) e^{iY} dn,$$

das über die reelle n -Achse zu erstrecken ist; φ sei überall langsam veränderlich. Dort wo Y sich rasch ändert, oszillieren $\cos Y$ oder e^{iY} sehr schnell und das Integral ist praktisch Null. Man hat daher nur die Umgebung der Punkte der reellen Achse zu untersuchen, wo Y ein Maximum oder Minimum hat, d. h. die Punkte der reellen Achse, für die

$$\frac{dY}{dn} = 0.$$

Y ist die stationäre Phase in diesen Punkten. Die Methode ist dargestellt bei Lamb zur Untersuchung der Wellen, die von einem Schiff verursacht werden; sie geht auf Lord Kelvin zurück.

Man wäre versucht die Methode auf den Fall auszuweiten, wo an Stelle des rein imaginären iY ein Exponent von der Form $X + iY$ auftritt; es scheint, daß man, X als langsam veränderlich vorausgesetzt, φe^X zusammenfassen und die vorstehenden Überlegungen anwenden kann. Indessen ist X nicht mehr langsam veränderlich, wenn X und Y reeller und imaginärer Teil derselben Funktion f sind; sie werden dann verknüpft durch die bekannten Gleichungen

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = \frac{\partial Y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial X}{\partial \eta} = - \frac{\partial Y}{\partial \xi},$$

wo

$$n = \xi + i\eta, \quad f = X + iY.$$

Wenn X auch längs der reellen Achse im allgemeinen langsam veränderlich ist, so variiert es doch dort schnell, wo

der imaginäre Teil stationär ist. In der Tat, ist für einen Punkt der reellen Achse $\partial Y / \partial \xi = 0$, so heißt dies, in der komplexen Ebene berührt eine Niveaulinie für Y die reelle Achse. Da aber (vgl. § 1) Niveaulinien für Y Falllinien für X sind, so ist an dieser Stelle der reellen Achse $\partial X / \partial \xi$ groß.

Am Anfang dieser Untersuchung habe ich gezeigt, wie man durch Deformieren des Integrationsweges in der komplexen n -Ebene schließlich nur die Umgebung der Sattelpunkte zu betrachten braucht.

Im Falle $X = 0$ auf der reellen Achse sind die Punkte stationärer Phase Sattelpunkte; denn man hat in der Tat

$$X = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial \xi} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\partial Y}{\partial \eta} = 0$$

und als Bedingung der stationären Phase $\partial Y / \partial \xi = 0$. Die Methode der Sattelpunkte und die der stationären Phase stimmen also für diesen Fall überein.

Ist X nicht Null, so liegt im allgemeinen in einem Punkte stationärer Phase kein Sattelpunkt vor, dann berührt nur eine Falllinie die reelle Achse. Dies bietet kein besonderes Interesse, die Sattelpunkte werden irgendwo außerhalb der reellen Achse liegen.

Als Beispiel will ich zeigen, daß in dem Fall, mit dem wir uns beschäftigt haben, diese Methode zu Resultaten führt, die zum Teil ungenau sind.

Wir hatten das Integral

$$\frac{1}{2\pi} \Re \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i(n t - k x)}}{n - \nu} dn,$$

in dem wir jetzt die Integration über die reelle Achse erstrecken. Für reelles n ist (vgl. Gleichung 2 u. 7):

$$k = \frac{n}{c} \mu \quad \mu = \mu_r + i \mu_i.$$

Die Phase ist stationär für

$$t - \frac{d k_r}{d n} x = 0, \quad \Theta - \frac{d(n \mu_r)}{d n} = 0$$

oder
$$\theta - \frac{c}{U} = 0,$$

wo U die Gruppengeschwindigkeit bedeutet, die in Fig. 19 als Funktion von n dargestellt ist. Im Gebiet anomaler Dispersion geht diese Kurve unter 1 und selbst unter 0 herunter. Die Punkte stationärer Phase ergeben sich als Schnittpunkte dieser Kurve mit einer Parallelen zur reellen Achse im Abstand θ . Man könnte also Punkte stationärer Phase erhalten für Werte von θ kleiner als 1 und selbst kleiner als Null. Die Integration in der Umgebung dieser Punkte würde ein von Null verschiedenes Resultat ergeben, d. h. man fände Vorläufer, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiteten, was unzutreffend ist.

Zum Schluß möchte ich Hrn. Prof. Sommerfeld, dem ich die Anregung zu dieser Arbeit und wertvolle Ratschläge verdanke, meinen verbindlichsten Dank aussprechen. Nicht minder danke ich Hrn. J. Fischer für die sorgfältige Übersetzung meiner Arbeit.

(Eingegangen 23. Februar 1914.)
